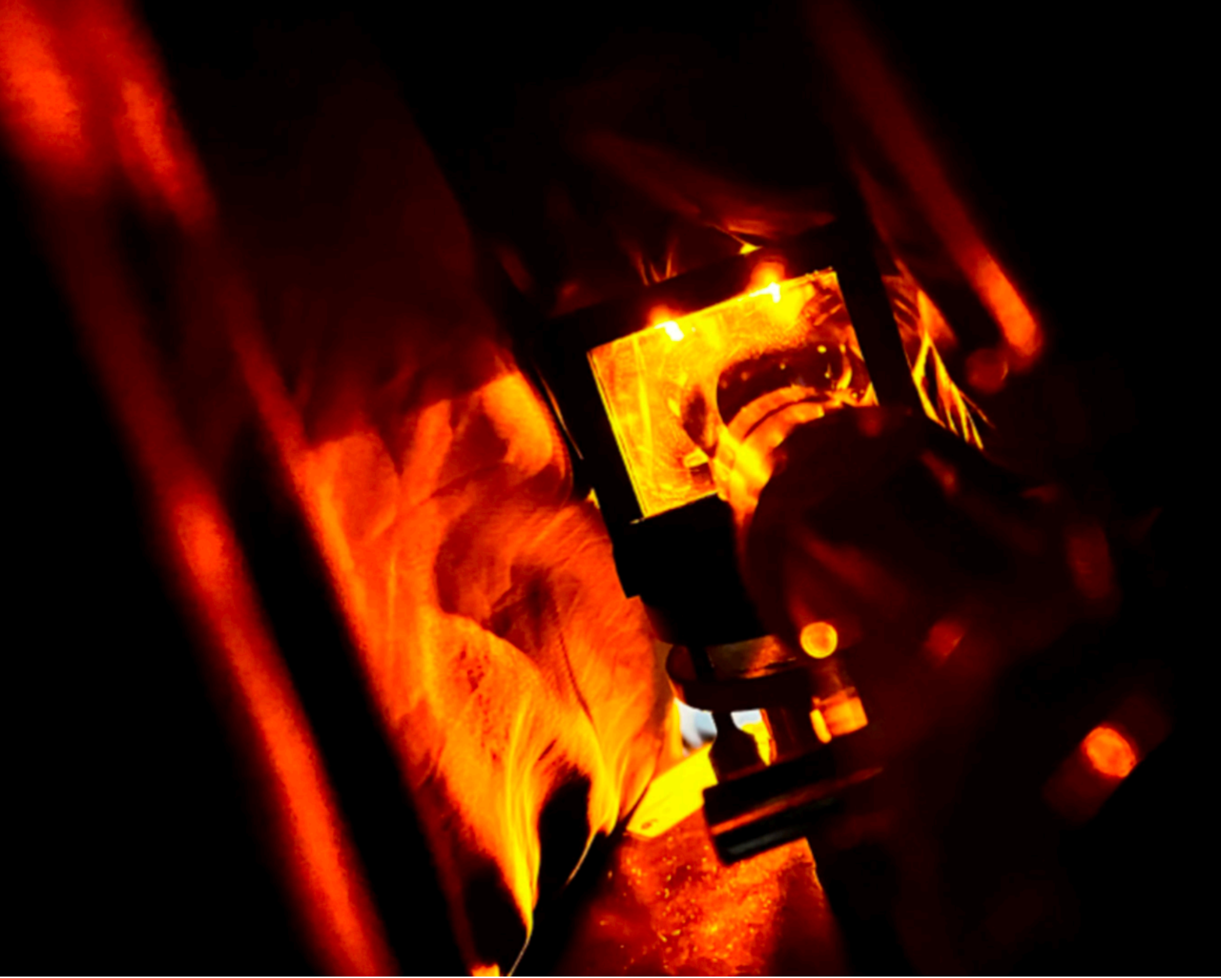

数学物理方法拾遗

Notes of mathematical methods in physics

作者：Photon Yan

组织：Tong Class, Peking University

时间：October 25, 2024

版本：320

目录

第一章 复变函数

1.1 基础知识

定理 1.1 (Cauchy-Riemann 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.1}$$

♡

定理 1.2 (解析函数必须满足的一个方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{1.2}$$

♡

推论 1.1 (极坐标下的 C-R 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.3}$$

♡

1.2 初等函数

命题 1.1 (三角函数与双曲函数的互化)

$$i\sinh z=\sin iz,\quad \cosh z=\cos iz,\quad i\tanh z=\tan iz \tag{1.4}$$

♠

定义 1.1 (宗量)

导致函数多值的部分。

♣

定义 1.2 (割线)

阻止一些会产生多值的路径的曲线。一条割线切出一个 Riemann 面，这个 Riemann 面上的幅角最大值为割线上岸，最小值为割线下岸。

♣

第二章 复变积分

2.1 基础知识

定义 2.1 (解析函数)

在复平面上任意点可导的函数为解析函数。♣

定理 2.1 (Cauchy 定理)

在区域 $\bar{G}$ 内的解析函数 $f(z)$ 满足：

$$\oint_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{2.1}$$

♡

注 即使函数在 ∞ 解析，它绕 ∞ 一周的积分也可以不为 0.

下面是 Cauchy 定理的一个等价表述：

推论 2.1 (变形定理)

若区域 $\bar{G}$ 的边界 C 可以连续变形为曲线 C'，则区域 $\bar{G}$ 内的解析函数 $f(z)$ 满足：

$$\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C'} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.2}$$

♡

引理 2.1 (小圆弧引理)

如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的空心邻域内连续，并且在 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ 中，当 $|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋向 k，则：

$$\lim_{\delta\to 0}\oint_{C_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = ik(\theta_2-\theta_1) \tag{2.3}$$

其中 C_δ 是半径为 δ 的一段小圆弧。♡

引理 2.2 (大圆弧引理)

如果函数 $f(z)$ 在 θ 的邻域内连续，并且在 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ 中，当 $|z| \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋向 K，则：

$$\lim_{\delta\to\infty}\oint_{C_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = iK(\theta_2-\theta_1) \tag{2.4}$$

其中 C_δ 是半径为 δ 的一段大圆弧。♡

定理 2.2 (Cauchy 积分公式)

设 $f(z)$ 是有界区域 $\bar{G}$ 内的单值解析函数，区域边界 C 是分段光滑曲线，$a\in G$，则：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z, \quad a\in G \tag{2.5}$$

♡

推论 2.2 (均值定理)

设 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 的圆周内解析，则：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \tag{2.6}$$

♡

Cauchy 积分公式可以迁移至无界区域，只需要保证 $f(z)$ 在围道 C 及 C 外解析，且 $f(z) \to 0$ 当 $z \to \infty$。
对 Cauchy 积分公式求导：

定理 2.3 (解析函数的高阶导数)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in G \tag{2.7}$$

♡

定理 2.4 (含参量积分的解析性)

1. $f(t, z)$ 是两个字变量的连续函数，而 $t \in [a, b], z \in \bar{G}$.
2. 对于 $[a, b]$ 上的任何 t，$f(t, z)$ 单值解析.

则：

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b f(t, z) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \,\mathrm{d}t, \quad z \in G \tag{2.8}$$

且等号左侧被求导函数解析。

♡

第三章 级数

定理 3.1 (无穷级数的 Cauchy 收充要条件)

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+,\quad s.t. \forall n\geq N, p\geq 1:$

$$|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon \tag{3.1}$$

注 在不改变求和次序的时候，可以随意给级数增添括号。但不可以随意删掉括号。

定义 3.1 (绝对收敛)

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。

绝对收敛级数有极其优异的性质：

1. 改变求和次序，收敛值不变。
2. 拆成子级数的求和，收敛值不变。
3. 拆成子级数的乘积，收敛值不变。

定义 3.2 (一致收敛)

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+,\quad s.t. \forall n\geq N, z\in G, \left|S(z)-\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\varepsilon$，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(z)$ 在 G 内一致收敛。

一致收敛的级数具有以下优异性质：

1. 和函数保持连续性：

$$\lim_{z\to z_0}\sum u_k(z)=\sum\lim_{z\to z_0}u_k(z) \tag{3.2}$$

2. 求和与积分可以换序。
3. 求和与求导可以换序，且导函数的级数一致连续。

定理 3.2 (Abel(第一) 定理)

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在 z_0 收敛，则在 $|z-a|\leq|z_0-a|$ 中绝对收敛，在 $|z-a|<|z_0-a|$ 中一致收敛。

证明见第 54 页。

幂函数的收敛半径有两种求法，一是根据 Cauchy 判别法产生的：

推论 3.1 (Cauchy-Hadamard 公式)

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的收敛半径是：

$$R=\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}} \tag{3.3}$$

推论 3.2 (d'Alembert 公式)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径是：

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{3.4}$$

♡

定理 3.3 (Abel(第二) 定理)

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内收敛到 $f(z)$，在收敛圆上的 z_0 也收敛，和为 $S(z_0)$，则当 z 于 $2\phi<\pi$ 的张角内趋向 z_0，则 $f(z)$ 趋向 $S(z_0)$。

♡

关于反常积分：

定理 3.4

如果存在函数 $\phi(z)$ 使得 $\forall t>T, \forall z\in\bar{G}, |f(t,z)|<\phi(t)$，且 $\int_a^{\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛，则原函数作为核的瑕积分在 $\bar{G}$ 中绝对且一致收敛。

♡

例题 3.1 计算瑕积分：

$$\int_0^{\infty}\exp(-t^2)\cos(2zt)\,\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

解 注意到对于 $z=x+iy$：

$$|\cos 2zt| = \sqrt{\cos^2 2yt-\sin^2 2xt}\le\cosh|2yt|\le e^{2yt} \tag{3.6}$$

$$|\exp(-t^2)\cos 2zt| < \exp(-t^2+2yt) := \phi(t) \tag{3.7}$$

而 $\phi(t)$ 可积，从而原积分一致收敛。因此：

$$F'(z) = -\int_0^{\infty}\exp(-t^2)2t\sin 2zt\,\mathrm{d}t \tag{3.8}$$

$$= -2zF(z) \tag{3.9}$$

解微分方程有：

$$\mathrm{d}\ln z = -2z\,\mathrm{d}z \tag{3.10}$$

$$F(z) = C\exp(-z^2) \tag{3.11}$$

而常数 C 可借助 $F(0)$ 求出：

$$C = \int_0^{\infty}\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.12}$$

因此：

$$F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-z^2) \tag{3.13}$$

引入记号 O 代表不高于该阶的小量，o 代表小量。

接下来做一做习题：

✍ **练习 3.1** 证明：

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1; \tag{3.14}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n \frac{\cos n\theta}{n} = \frac{1}{2}\ln(1+r^2+2r\cos\theta), \quad r\in(-1,1) \tag{3.15}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n \frac{\sin n\theta}{n} = \arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}, \quad r\in(-1,1) \tag{3.16}$$

解 第一式易证：

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\frac{1}{1-z}$$

第二、三式易证：

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-r\exp(i\theta))^n}{n} &= \ln\left(1+r\exp(i\theta)\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{1+r^2+2r\cos\theta}\exp\left(i\arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+r^2+2r\cos\theta) + i\arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}
\end{aligned}$$

分别取实部和虚部可证毕。

✍ **练习 3.2** 求级数：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(in\theta)}{n} \tag{3.17}$$

解

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{i\exp(i\theta)}{1-\exp(i\theta)} \\
S &= \int\frac{\mathrm{d}\exp(i\theta)}{1-\exp(i\theta)} \\
&= -\ln(1-\exp(i\theta)) + C \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta) + i\arctan\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + C
\end{aligned}$$

取 $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Re S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3} \\
&= -\frac{\ln 2}{2} + \Re C
\end{aligned}$$

取 $\theta = 0$:

$$0 = \frac{i\pi}{2} + \Im C$$

从而：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(in\theta)}{n} = -\frac{i\pi}{2}\ln(2+2\cos\theta) + \pi\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{3} + i\frac{\pi}{2} \tag{3.18}$$

第四章 解析函数的局域性展开

4.1 Taylor 级数

这里给出一种与初等微积分不同的思路取得 Taylor 级数。

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$，下面我们来求解 a_n。

证明 根据 Cauchy 积分公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.2}$$

逆用几何级数：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\zeta \tag{4.3}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.4}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{4.5}$$

进而：

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{4.6}$$

定理 4.1 (Taylor 级数的收敛范围)

设解析函数 $f(z)$ 的 Taylor 级数为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$，距离 a 最近的奇点为 b，则收敛半径为 $|b-a|$。 ♡

逐阶求导并取极限 $z\to a$，可知：

定理 4.2

Taylor 级数具有唯一性。 ♡

两种新的求 Taylor 级数的方法，**级数乘法与待定系数法**：

例题 4.1 求 Taylor 级数：

$$\frac{1}{1-3z+2z^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z} \tag{4.7}$$

解

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2}&=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}2^lz^l\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}2^l\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n\end{aligned}$$

待定系数法不再做展开。

定义 4.1 (无穷远处的 Taylor 级数)

形如：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n} \tag{4.8}$$

的级数。

例如：

例题 4.2 在无穷远展开：

$$\frac{1}{1-z^2},\quad |z|>1 \tag{4.9}$$

解

$$\frac{1}{1-z^2}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}$$

笔记

$$(-1)^n\binom{-1/2}{n}=\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)$$
$$=\frac{1}{2^n}\frac{(2n-1)!!}{n!}=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

定义 4.2 (高阶零点)

满足 Taylor 级数前 m 项系数为零的零点为函数的 m 阶零点。

m 阶零点处前 $m-1$ 阶导数均为 0.

解析函数的零点具有孤立性，这导致局域内解析函数具有唯一性。

4.2 Laurent 级数

定义 4.3 (Laurent 级数)

在复联通区域内：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n \tag{4.10}$$

其中，系数满足：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.11}$$

对于 $n>0$，称作级数的正则部分，在外圆内绝对一致收敛；对于 $n<0$，称作级数的主要部分，在内圆外绝对一致收敛。

定义 4.4 (孤立奇点)

如果 Laurent 级数的内环半径可以趋于无穷小，则中心奇点被称作孤立奇点。

Laurent 级数亦具有唯一性。

待定系数法只能用于有限个正幂项或负幂项的情形。

练习 4.1 求 $f(z)=\sin z$ 在 ∞ 空心邻域内的 Laurent 展开。

解

$$f(\omega^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\omega^{-(2n+1)}$$
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$$

4.3 单值函数的孤立奇点

定义 4.5 (可去奇点)

在孤立奇点 $z-b$ 附近，若函数展开的 Laurent 级数没有负幂项，则称该奇点为可去奇点。♣

可去奇点可通过补充在奇点的合适定义变为解析函数。

定义 4.6 (极点)

在孤立奇点 $z-b$ 附近，若函数展开的 Laurent 级数有有限项负幂项，则称该奇点为极点。负幂项次数绝对值的最大值被称作该极点的阶数。♣

对于 m 阶极点 $z=b$，总有在 $z=b$ 解析的函数 $\frac{1}{\phi(z)}$ 满足：

定理 4.3

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)} \tag{4.12}$$

♡

可根据上式确定极点阶数。

定义 4.7 (本性奇点)

在孤立奇点 $z-b$ 附近，若函数展开的 Laurent 级数有无穷多项负幂项，则称该奇点为本性奇点。♣

定理 4.4 (l'Hopital 法则)

若 $z=b$ 不是 $f(z), g(z)$ 的本性奇点，则极限满足：

$$\lim_{z\to b} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to b} \frac{f'(z)}{g'(z)} \tag{4.13}$$

♡

一个有趣的事实，对于本性奇点，选取不同的趋近方式，极限值可以为任意有限复数，且至多有一个例外（Picard 例外值）

4.4 解析延拓

定义 4.8 (解析延拓)

设函数 $f_1(z)$ 在区域 g_1 解析，$f_2(z)$ 在区域 g_2 解析，$g_1 \cap g_2 \neq \varnothing$，$f_1(z) = f_2(z) \forall z \in g_1 \cup g_2$，则它们互相为彼此在自己所独在区域（$g_1/g_2, g_2/g_1$）的解析延拓。♣

4.5 Bernoulli 数和 Euler 数

定义 4.9 (Bernoulli 数)

生成函数为：

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \tag{4.14}$$

♣

注意到生成函数可以被写作：

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{2}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}-1\right)=\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}-\frac{z}{2} \tag{4.15}$$

第一项为偶函数，因此展开后只有偶次项。所有的奇数次项中仅有第二项 $-\frac{z}{2}$ 贡献的 $B_1=-\frac{1}{2}$。因此 $B_{2n+1}=-\frac{1}{2}\delta_{n0}$。$\delta$ 是 Kronecker Delta，当下标相等取 1，否则取 0。

求极限可得 $B_0=1$。

利用级数乘法可得：

$$\begin{aligned}
\frac{e^z-1}{z}\left[-\frac{z}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n!}z^{2n}\right]&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}\left[-\frac{z}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n!}z^{2n}\right] &(4.16)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\left[-\frac{z}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n!}z^{2n}\right] &(4.17)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{1}{(k-2n+1)!}\frac{B_{2n}}{(2n)!} &(4.18)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{k!}{(k-2n+1)!}\frac{B_{2n}}{(2n)!} &(4.19)\\
&=1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{k!}{(k-2n+1)!}\frac{B_{2n}}{(2n)!} &(4.20)\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\left(\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{k!}{(k-2n+1)!}\frac{B_{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{2}\right)=1 &(4.21)
\end{aligned}$$

得到递推方程：

$$\sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{k!}{(k-2n+1)!}\frac{B_{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2} \tag{4.22}$$

定义 4.10 (Euler 数)

生成函数为：

$$\frac{2}{\exp(z)+\exp(-z)}=\operatorname{sech}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n \tag{4.23}$$

♣

接下来我们尝试推导一下 Euler 数的递推方程，求极限可得 $E_0 = 1$：

$$\frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n+(-z)^n}{2n!}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}z^n \tag{4.24}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \tag{4.25}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\sum_{n=0}^{k}\frac{E_{2n}}{(2n)!}\frac{(2k)!}{(2k-2n)!} = 1 \tag{4.26}$$

抛去第零项后有递推方程：

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{E_{2n}}{(2n)!}\frac{(2k)!}{(2k-2n)!} = 0, \quad k \geq 1. \tag{4.27}$$