Chapter 1

极限

1.1 $\varepsilon-\delta$ 语言

引入 $\varepsilon-\delta$ 语言的必要性。

问题 1 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \tag{1.1}$$

♠

不引入 $\varepsilon-\delta$ 语言，很难证明上述极限为 1。

定理 1 斯特林公式：

$$\Gamma(n+1)\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.2}$$

♠

下面我们从序列极限开始，引入 $\varepsilon-N$ 定义：

定义 1 序列的极限：

$$\exists a\in\mathbb{R},\ s.t.\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N},s.t.\forall n>N,|a_n-A|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

则记作：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \tag{1.4}$$

读作：数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A。 ♠

定义 2 上极限：

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}x_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{i\geq n}x_i \tag{1.5}$$

♠

定义 3 下极限：

$$\varliminf_{x\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geq n} x_i \tag{1.6}$$

♠

若不存在极限，则称数列**发散**。

上下极限不相等，极限不存在。下面用肯定语言描述极限不存在：

$$\forall A \in R\,,\, \exists \varepsilon > 0\,,\, \forall N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,,\, \exists n > N\,,\, |a_n - A| \geq \varepsilon \tag{1.7}$$

定义 4 序列有界：

$$\exists M > 0, \forall i \in \mathbb{N}_+, |a_i| < M \tag{1.8}$$

有上界：

$$\exists M > 0, \forall i \in \mathbb{N}_+, a_i < M \tag{1.9}$$

有下界：

$$\exists M > 0, \forall i \in \mathbb{N}_+, a_i > M \tag{1.10}$$

♠

定理 2 收敛序列必有界。 ♠

该命题的证明只需取 $M = \max\{|a_i|, \lim_{n\to\infty} +1\}$ 即可。

回到开头的例子，证明 $\sqrt[n]{n}$ 极限为 1：

证明 令：

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \tag{1.11}$$

化简：

$$n < (1+\varepsilon)^n \tag{1.12}$$

因此当：

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \cdots > \frac{n(n-1)}{2} > n \tag{1.13}$$

即：

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \tag{1.14}$$

取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 3$，有：

$$\forall n > N, \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon \tag{1.15}$$

从而：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{1.16}$$

■

下面给出几个重要的不等式：

$$\text{三角不等式:}\quad |a|-|b| \le ||a|-|b|| \le |a+b| \le |a|+|b| \tag{1.17}$$

$$\text{Bernoulli 不等式:}\quad (1+x)^n \ge 1+nx, \quad x>-1 \tag{1.18}$$

$$\text{均值不等式:}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \tag{1.19}$$

$$\text{Cauchy 不等式:}\left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2\right) \ge \left(\sum ab\right)^2 \tag{1.20}$$

利用不等式证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[x]{n} = 1$：

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \ge 1+\frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \tag{1.21}$$

又有：

$$\sqrt[n]{n} < \left(1+n^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 1+\frac{1}{n}+2\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1 \tag{1.22}$$

证毕。

另一种证明方法：

$$\sqrt[n]{n} = \left(\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot 1\cdots 1\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n} \tag{1.23}$$

师说 1 上高中了吗？ ♡

将极限的概念推广到函数：

定义 5 函数 $f(x)$ 极限：

$$\exists A,\, s.t. \forall\delta>0,\, \exists\varepsilon>0\, s.t. \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta),\, |f(x)-A|<\delta \tag{1.24}$$

则:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \tag{1.25}$$

♠

定理 3 lim 的简单性质：与有限次四则运算的对易子为零。 ♠

证明 先证加法，记 a_n, b_n 的极限分别是 a, b：

$$|a_n+b_n-a-b| = |a_n-a+b_n-b| \le |a_n-a|+|b_n-b| \le \varepsilon_1+\varepsilon_2 \tag{1.26}$$

取 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $N=\max\{N_1,N_2\}$ 便得证。

下面证明乘法：

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab_n| && (1.27) \\ &\le |a_n||b_n - b| + |b_n||a_n - a| && (1.28) \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \max\{a_n\}\varepsilon_2 + \max\{b_n\}\varepsilon_1$, $N = \max\{N_1, N_2\}$ 即可。 ■

极限的四则运算需要保证极限存在。因此，以下四种**不定式**不能直接四则运算：

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0\cdot\infty \quad \infty - \infty \tag{1.29}$$

极限的四则运算只能是有限次。例如：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = +\infty \tag{1.30}$$

上述极限并不为 0。

定理 4 三明治原理 (夹逼定理)：对于三个函数或序列（可看做定义域为 $\mathbb{N}_+$ 的函数）$f(x), g(x), h(x)$，若 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 在 x_0 的邻域内均被满足，且：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A \tag{1.31}$$

则：

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A \tag{1.32}$$

♠

下面以数列极限为例子进行证明，对于序列 $a_n \le c_n \le b_n$：

证明 由于：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A \tag{1.33}$$

因此：

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \quad s.t. \quad \begin{matrix} |a_n - a| < \varepsilon, & n > N_1 \\ |b_n - a| < \varepsilon, & n > N_2 \end{matrix} \tag{1.34}$$

则当 $N > \max(N_1, N_2)$：

$$|c_n - a| < \varepsilon, \quad n > N \tag{1.35}$$

■

问题 2 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} i^2} \tag{1.36}$$

♠

解答 注意到：

$$2024 \le \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} i^n} \le 2024\sqrt[n]{2024} \tag{1.37}$$

两侧极限均为 2024，故：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{2024} i^2} = 2024 \tag{1.38}$$

♠

问题 3 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i} \tag{1.39}$$

♠

解答 一眼定真，鉴定为 $\ln 2$。 ♠

问题 4 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) \tag{1.40}$$

♠

解答

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{(i+1)(i-1)}{i^2}\right) = \frac{1}{4} \tag{1.41}$$

♠

1.2 $\mathbb{R}$ 的连续性与 $\lim$ 的其它求法