师说 1 高数“胡扯”，线代“瞎想”——并行不悖。自学！ ♡

复习：

定理 1 $\mathbb{R}$ 具有连续性。 ♠

定理 2 单调递增有上界数列必有极限；单调递减有下界数列必有极限。 ♠

新课：

定义 1 自然常数 e:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

♠

自然常数来自于人类对复利的研究。下面是形象表述：借一块钱，一年后换，不得提前还款；一年总利息 100%，半年利息 50%，以此类推；问总利息的极限是多少。写作数学形式即：

$$\lim_{n\to}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

证明极限存在：

证明 首先，注意到：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \tag{3}$$

化简：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{j-1}{n}\right) \tag{4}$$

从而数列递增。又注意到（将大于 2 的数都放缩到 2）：

$$\frac{1}{i!} < \frac{1}{2^{i-1}} \tag{5}$$

有：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\sum_{i=1}^{n-1}2^{-i} \leq 3 \tag{6}$$

从而有界。故极限存在。 ■

证明二：

证明

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) &(7)\\ &= \frac{n}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right] \geq \frac{n+1}{n}\left[1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] &(8)\\ &= \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = 1 &(9)\end{aligned}$$

■

证明三：

证明

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot 1 &(10)\\ &\leq \left(\frac{\frac{n+1}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &(11)\end{aligned}$$

■

师说 2 $1+1$，应该是等于 2 吧。 ♡

定理 3 极限具有保序性。 ♠

注意到：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} \to e \tag{12}$$

又有二项式展开后可证明[1]：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} \geq \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!} \tag{13}$$

两侧取极限：

$$e \geq \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!} := c_k \tag{14}$$

估算，注意到：

$$\sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m-n}\frac{1}{(n+1)^i}\right) < \frac{1}{n!}\frac{1}{n} \tag{15}$$

有：

$$0 \leq b_{m+n} - b_n \leq \frac{1}{n!\cdot n} \tag{16}$$

[1]这里必须取极限，消掉 $\frac{n+i}{n}$ 的系数。

取极限：

$$e \le b_n + \frac{1}{n! \cdot n} \tag{17}$$

结合前面的结论，我们有：

$$\sup_k \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \le \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} \tag{18}$$

综上：

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tag{19}$$

问题 1 思考题：已知 $|e-b_n| \le \frac{1}{n!\cdot n}, b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$，证明 e 是无理数。（提示：反证法，两边同时乘 $q!$） ♠

解答 反证，设 $e = p/q, \gcd(p,q) = 1$。代入已知条件：

$$\left|\frac{p}{q} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\right| \le \frac{1}{n! \cdot n} \tag{20}$$

令 $n = q$：

$$\left|\frac{p}{q} - \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i!}\right| \le \frac{1}{q! \cdot q} \tag{21}$$

两侧同时乘 $q!$：

$$\left|p(q-1)! - \sum_{i=1}^{q} \frac{q!}{i!}\right| \le \frac{1}{q} \tag{22}$$

不等式左侧是大于零的正整数，右侧为小于一的分数，不等式不可能成立，故原命题得证。 ♠

师说 3 这门课的核心是自学。 ♡

命题 1 数列 $\{a_n\}$ 递减：

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{23}$$

♠

证明

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1+\frac{1}{n+1}\right]^{n+1}\left[1=\frac{1}{n+1}\right]^{n+1} \tag{24}$$

$$\leq \left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \tag{25}$$

$$= \left[1-\frac{1}{(n-1)^4}\right] \leq 1 \tag{26}$$

故递减。 ■

问题 2 求方程 $x^y = y^x$ 的有理解。 ♠

解答 因为两变量均为有理数，故存在 $k \in \mathbb{Q}$ 满足 $y = kx$。代入方程可得：

$$x^{kx} = (kx)^x = k^x x^x \tag{27}$$

化简：

$$x^{x(k-1)} = k^x \tag{28}$$

两侧同时开 x 次方：

$$x^{k-1} = k \tag{29}$$

从而有解：

$$\begin{cases} x = k^{\frac{1}{k-1}} \\ y = k^{\frac{k}{k-1}} \end{cases} \tag{30}$$

令有理数 k 满足 $k-1 = p/q, \gcd(p,q) = 1$，有：

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{p+q}{q}\right)^{\frac{q}{p}} \\ y = \left(\dfrac{p+q}{q}\right)^{\frac{p+q}{p}} \end{cases} \tag{31}$$

对于有理数 x, y，应有：

$$q^{\frac{1}{p}} = m \in \mathbb{N}, \quad (p+q)^{\frac{1}{p}} = n \in \mathbb{N} \tag{32}$$

注意到 $q = m^p, p+q = n^p$，但幂增长远快于“$+q$”：

$$m^p \leq p+q = n^p < (m+1)^p < m^p + mp \tag{33}$$

因此 p 只能等于 1：

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{q} \\ y = \left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{q+1} \end{cases} \tag{34}$$

♠

定理 4 Stirling 公式弱化版：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = \frac{1}{e} \tag{35}$$

♠

证明 不等式三侧同时累乘：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{36}$$

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i} < e^{k} < \prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i+1} \tag{37}$$

消除掉所有公共项：

$$\frac{(k+1)^k}{k!} < e^k < \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \tag{38}$$

$$\frac{(k+1)^k}{e^k} < k! < \frac{(k+1)^{k+1}}{e^k} \tag{39}$$

$$\frac{1}{e}\frac{k+1}{k} < \frac{\sqrt[k]{k}}{k} < \frac{1}{e}\frac{k+1}{k}\sqrt[k]{k+1} \tag{40}$$

三侧同时求极限，原命题得证。 ■

定理 5 Stirling 公式：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \tag{41}$$

♠

问题 3 求证下述极限存在，并记极限值为欧拉常数 γ：

$$a_n = -\ln n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \tag{42}$$

♠

证明 我们想要证明：

$$a_{n+1} - a_n = -\ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} > 0 \tag{43}$$

或者：

$$a_{n+1} - a_n = -\ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} < 0 \tag{44}$$

即证明：

$$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{45}$$

这是已知的。这是因为 ln 中的函数为单调递减的趋近于 e 的序列。因此 $\{a_n\}$ 单调减。下面证明它有下界。对 e 的两侧定义取对数：

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{46}$$

因此很显然：

$$1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{n} \tag{47}$$

■

0.1 序列与子序列的极限

定义 2 对于序列 $\{a_n\}$，对于 $\forall n_1 < n_2 \cdots < n_k < \cdots$，称序列 $\{a_{n_i}\}$ 为原序列的子序列。 ♠

定理 6 收敛序列的任意子列极限值与原序列相同。 ♠

定理 7 若一个序列的两个子列分别收敛于不同值，则原序列极限不存在。 ♠

定理 8 柯西收敛准则：

$$\lim_{n\to\infty} a_n\text{存在} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\, \exists N \quad s.t. \quad \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{48}$$

♠

柯西收敛准则可以在不知道极限值时证明极限存在。