先扩充指数函数的定义域 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$。设 x_0 是有理数列 $\{a_n\}$ 的极限，则定义：

$$e^{x_0} := \lim_{n\to\infty} e^{a_n} \tag{1}$$

下证唯一性：

证明 设存在另一列有理数 $\{b_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$，下证：

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} \tag{2}$$

当 $a > 1, |p-q| < 1$，利用伯努利不等式：

$$|a^p - a^q| = a^q|(1+(a-1))^{p-q} - 1| \leq a^q(a-1)|p-q| \tag{3}$$

或用几何-算数均值不等式：

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m \cdot 1^{n-m})^n \leq \frac{ma+n-m}{n} \tag{4}$$

代入 $m = p-q, n = 1$，注意到 $|a_n - b_n| \leq |a_n - l| + |b_n - l| \leq 2\varepsilon$ 得证。 ■

师说 1 你要能把 $\sqrt{2\pi}$ 瞪出来就不用上线性代数了，因为你已经有了超越线性的直观。♡

定理 1 有界序列必有收敛子列。 ♠

下面证明柯西收敛准则：

证明 必要性：由闭区间套定理可得，存在子序列极限。由于 m, n 任取，整个序列的极限等于子序列极限。充分性：有限累加可得。 ■

推论 1 极限不存在（发散）：

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n, m > N, s.t. \quad |a_n - a_m| > \varepsilon \tag{5}$$

♠

问题 1 证明：调和级数发散。 ♠

证明 注意到 $S_{2n} - S_n (\sim \ln 2) > \frac{1}{2}$ 得证。 ■

问题 2 证明, 下列级数收敛:

$$\sum \frac{1}{i^2} \tag{6}$$

♠

证明 注意到：

$$\sum \frac{1}{i^2} < \frac{1}{i(i-1)} < \frac{1}{n} \tag{7}$$

取 $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$ 即满足柯西收敛准则。 ■

定理 2 压缩映照原理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且满足：

1. $f([a,b]) \subset [a,b]$;
2. $\exists q \in (0,1), s.t. \quad |f(x) - f(y)| \le q|x-y|, \forall x \in [a,b]$.

则存在唯一的 $c \in [a,b] s.t. \quad f(c) = c$。 ♠

这其实是二维迭代的蛛网图。

证明 先证明存在性：

$$x_{i+1} := f(x_i) \tag{8}$$

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le q|x_{n-1} - x_{x-2}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0| \tag{9}$$

$$|x_n - \xi| \le k^n |x_0 - \xi| \tag{10}$$

两侧取极限，夹逼得证。

关于唯一性：反证，取两个不动点，则 $q = 1$ 不满足题意。 ■

P.s. 我觉得谢惠民真的是太重要了，好多题都是从这上面抄的。还有红皮，最好把例题都做一遍——当然，如果期中前时间允许的前提下。

0.1 函数的极限与连续性

当 x 有趋向，$f(x)$ 有没有趋向？

定义 1 $\mathring{U}(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. ♠

定义 2 设函数 $f: X \mapsto Y$ 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 有定义，且 $X, Y \subset \mathbb{R}$，则 $\forall \delta > 0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A := \exists \varepsilon(\delta) > 0, s.t. \quad \forall |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{11}$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A := \exists \varepsilon(\delta) > 0, s.t. \quad \forall x_0 - x < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{12}$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A := \exists \varepsilon(\delta) > 0, s.t. \quad \forall x - x_0 < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{13}$$

又有趋向于无穷的极限，$\forall varepsilon > 0$：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A := \exists N, s.t. \quad \forall |x| > N, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A := \exists N, s.t. \quad \forall x > N, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A := \exists N, s.t. \quad \forall -x > N, |f(x) - A| < \varepsilon \tag{16}$$

♠

定义 3 趋向无穷：

$$f(x) \to +\infty := \forall \delta > 0, \exists N(\delta) > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta), f(x) > N \tag{17}$$

$$f(x) \to -\infty := \forall \delta > 0, \exists N(\delta) > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta), -f(x) > N \tag{18}$$

$$f(x) \to \infty := \forall \delta > 0, \exists N(\delta) > 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta), |f(x)| > N \tag{19}$$

x 趋向无穷的极限定义将 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 换做 $|x| > N$ 即可。 ♠

定理 3 两侧极限相等是极限存在的充要条件。 ♠

定义 4 连续：

$$\lim f(x) = f(\lim x) \tag{20}$$

♠

连续是一个点性质。必须区分“在 x_0 连续”与“在定义域连续”。点连续不一定意味着邻域连续。例如狄利克雷函数乘 x：

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{21}$$

仅在 $x = 0$ 连续。

定理 4 六类初等函数与它们的有限次四则运算、复合在它们的定义域内均连续。 ♠

闭区间上的连续函数的性质是 $\mathbb{R}$ 的性质的推广。

下面以正弦函数为例，证明初等函数的连续性：

证明

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \tag{23}$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \tag{24}$$

$$\leq |x - x_0| \tag{25}$$

从而取 $\delta = \varepsilon$ 即可。 ■

这里运用到了几何结论：

$$\sin x < x < \tan x \tag{26}$$

师说 2 额，这个……把三角公式列给大家吧。 ♡

以下是积化和差和和差化积公式。

$$\sin\alpha\sin\beta = -[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]/2 \tag{27}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]/2 \tag{28}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]/2 \tag{29}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]/2 \tag{30}$$

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin[(\theta+\varphi)/2]\cos[(\theta-\varphi)/2] \tag{31}$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\cos[(\theta+\varphi)/2]\sin[(\theta-\varphi)/2] \tag{32}$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos[(\theta+\varphi)/2]\cos[(\theta-\varphi)/2] \tag{33}$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin[(\theta+\varphi)/2]\sin[(\theta-\varphi)/2] \tag{34}$$