Peking University **严绍恒**, Shaoheng Yan
Name of Course: 高等数学-A **ID:** 2400017416
Prof. 束琳 **Date:** 2024 年 9 月 24 日

极限作业

1 习题 1.3

问题 1 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$，证明 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|$。

证明

$$\exists N > 0, s.t. \quad ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < \varepsilon \tag{1}$$

■

问题 2 设 $\{a_n\}$ 有极限 l，证明：

1. 存在 $N \in \mathbb{N}, s.t. \quad \forall n > N, \quad |a_n| < |l| + 1$；
2. $\{a_n\}$ 是有界序列，存在常数 $M, s.t. \quad |a_n| \leq M$。

证明 由于存在极限：

1. $$\exists N > 0, s.t. \quad \forall n > N ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < 1 := \varepsilon \tag{2}$$
2. 设 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. \quad \forall n > N \in \mathbb{N}$，$|a_n - l| < \varepsilon$，设 $M = \max(a_1, \cdots, a_{N-1}, l+1)$，得证。 ■

问题 3 证明极限：

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$;
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n}{n+1} = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0 (|q| < 1)$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots \frac{1}{(n-1)n} = 1$;

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{3/2}}$

解答 1.

$$\frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2(2n-3)} \tag{3}$$

$$a_n - \frac{3}{2} < \varepsilon \tag{4}$$

$$n > \frac{11}{4\varepsilon} + \frac{3}{2} \tag{5}$$

N 取右侧式子取证加一即可。

2.

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} < \varepsilon \tag{6}$$

取 $N = [\varepsilon^{-3}] + 1$ 即可。

3.

$$\begin{aligned} n^2 q^n &:= \frac{n^2}{(1+a)^n} &(7)\\ &= \frac{n^2}{1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 + \cdots} &(8)\\ &< \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)a^3} &(9)\\ &< \frac{18}{a^2 n} < \varepsilon &(10)\\ n &> \max\left\{3, \frac{18}{a^3\varepsilon}\right\} &(11) \end{aligned}$$

取 N 为不等式右侧向下取整再加一即可。

4.

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \tag{12}$$

取 $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$ 即可。

5.

$$\sum \frac{1}{n(n-1)} = \sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \tag{13}$$

取 $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$ 即可。

6.
$$\sum \frac{1}{(n+i)^{3/2}} < \frac{n}{(n+1)^{3/2}} < \frac{1}{n^{1/2}} \tag{14}$$

取 $N = [\varepsilon^{-2}] + 1$ 即可。

问题 4 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，又设 $\{b_n\}$ 是有界序列，证明 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明 由题意，$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t.\quad \forall n > N, |a_n| < \varepsilon$。设 $|b_n|$ 的上界为 M，对于相同的 N，取 $\varepsilon' = M\varepsilon$ 即可证明待证命题。 ■

问题 5 证明极限：
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{15}$$

证明 在课堂上我们已有三种不同的证法，分别是定义法和两种不同的不等式法。下面再尝试利用别的方法证明：对两侧同时取对数。因为初等函数 $\ln x$ 在 $(-1, +\infty)$ 连续，从而有：
$$\ln \lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{\ln n}{n} \tag{16}$$

利用 *Stolz* 定理：
$$\lim \frac{\ln n}{n} = \lim \ln \frac{n+1}{n} = \ln \lim \frac{n+1}{n} = 0 \tag{17}$$

从而原命题得证。 ■

问题 6 求下列各极限的值：

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 100}{4n^3 - n + 2}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}$;
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$;
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
6. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

解答 1. 化为分式，0.

2. 略去小量，$\frac{1}{4}$.

3. 幂的运算，e^{-2}.

4. 变量代换，e^{-1}.

5. 幂的运算，$\prod_{i=1}^{n} e^{-1} \to 0$.

6. 幂的运算，$e^{-\frac{1}{n}} \to 1$

问题 7 用单调有界序列收敛证明下列序列极限存在：

1. $x_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-2}$;

2. $x_n = \sum_{i=1}^{n} (n+i)^{-1}$.

证明 作为正项级数，显然单调。下面分别证明有界：

1. 放缩：
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2 \tag{18}$$
有界，证毕；

2. 放缩：
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \tag{19}$$
有界，证毕。 ∎

问题 8 证明极限：
$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \tag{20}$$

证明 课堂上已经完成过证明。现在进行复习：
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{1-j}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \tag{21}$$
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} > \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \quad \forall k = 0, 1, \cdots \tag{22}$$
$$e \ge \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \tag{23}$$
∎

2 习题 1.4

问题 9 直接用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明下列各极限：

1. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$;
2. $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.
3. 这里有同学问我如何证明 e^x 也连续，故补充。

证明 1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\mathring{U}(a,\delta),|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\left|\dfrac{\delta}{\sqrt{a-\delta}+\sqrt{a}}\right|$，则定义 $\varepsilon=\sqrt{a}-\sqrt{a-\delta}$ 即可。

2. $|\cos x-\cos a|=\left|2\sin\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}\right|<2\left|\dfrac{x-a}{2}\right|<|x-a|$，定义 $\varepsilon=\delta$ 即可。

3. $|e^x-e^a|=e^a|e^{x-a}-1|<e^a|e^\delta-1|\le\varepsilon$，解不等式：

$$e^\delta<\varepsilon e^{-a}+1 \tag{24}$$

$$\text{取}\delta=\ln(1+\varepsilon e^{-a}) \tag{25}$$

■

问题 10 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，证明：存在 a 的一个空心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$，使得函数 $y=f(x)$ 在该邻域内为有界函数。

解答 由极限定义，令 $\varepsilon=1,\exists\delta,s.t.\quad\forall x\in\mathring{U}(a,\delta),|f(x)-f(a)|<1$，则显然 $|f(x)|<l+1$ 为有界函数。

问题 11 求下列各极限的值：

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{30}}$;
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;
5. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}(n\in\mathbb{N})$;

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}\cdots+b_n}$;

8. $\lim_{x\to a+0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}$.

解答 1. 化简 $\dfrac{x}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

2. 定义域上的连续函数，直接代入，0.

3. 舍小量，$\dfrac{2^{20}3^{10}}{2^{30}}=1.5^{10}$.

4. 化简 $\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\dfrac{2}{2}=1$.

5. 通分 $\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}=\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=\dfrac{-3}{3}=-1$.

6. 注意到 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)$，消除 $x-1$ 再代入 $x=1$ 后得 n.

7. $\dfrac{a_m}{b_n}$，当 $b_n\neq 0$；∞，当 $b_n=0$.

8.（似乎红皮书第二版第三版本题不太一样，我在这里先按照第二版做）拆开：

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^3-a^3}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}} &(26)\\ &=\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^3-a^3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+a^2}} &(27)\\ &=\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2+ax+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+a^2}} &(28)\\ \lim_{x\to a+0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}&=\frac{1}{\sqrt{3}a} &(29)\end{aligned}$$

8’ 第三版：

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}} &(30)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2a}} &(31)\end{aligned}$$

问题 12 利用两个重要极限证明：

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}$;

2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^2)}{3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x-\sin 2x}{\sin 5x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{-x}$;

7. $\lim\limits_{y\to 0}(1-5y)^{\frac{1}{y}}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+100}$.

解答 1. $\dfrac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}=\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\cos\beta x=\dfrac{\alpha}{\beta}(x\to 0)$.

2. $\dfrac{2x^2}{3x}\to 0$.

3. $\dfrac{3x-2x}{5}\to\dfrac{1}{5}$.

4. $\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}\to\sqrt{2}$.

5. $\dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\to\cos a$.

6. e^{-k}.

7. e^{-5}.

8. e.

问题 13 给出:

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty\quad 及\quad \lim_{x\to -\infty}f(x)=-\infty \tag{32}$$

的严格定义。

解答 1. $\forall M>0,\exists\delta(\delta)>0,s.t.\quad \forall x\in\mathring{U}(a,\delta),f(x)>M$;

2. $\forall M>0,\exists N>0,s.t.\quad \forall x<-N,f(x)<-M$.