Chapter 1

线性方程组

定义 1 形如：

$$\begin{cases} \sum a_{1j}x_j = b_i \\ \vdots \\ \sum a_{mj}x_j = b_i \end{cases} \tag{1.1}$$

的方程组被称作线性方程组，其中 a_{ij} 为方程的**系数**，b_i 为**常数项**。 ♠

值得注意的是，上述线性方程组可以写作一个二阶张量与矢量缩并的形式，这也体现了矩阵是二维线性变换的本质：

$$A_{ij}x^j = b^i \tag{1.2}$$

这里已经使用了求和约定。

下面我们来尝试求解线性方程组。小学时我们已经学过代入消元法和加减消元法，现在将其推广至 n 元。首先讨论解的存在情况。对于一个线性方程组：

1. 当方程组中存在两个相同的方程，方程组有无数组解。
2. 当方程组存在两个相互矛盾的方程，方程组无解。
3. 当方程组个数等于未知数个数且非上述两种情况，方程组有唯一解。

解 n 元方程组的步骤为 (Gauss-Jordan 算法)：

1. 将方程第一行的 $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ 倍加到方程组的第 k 行。使得 a_{n1} 中只有 a_{11} 非零。
2. 调换位置并重复迭代，将方程第 l 行的 $-\frac{a_{kj}}{a_{lj}}$ 倍加到方程组的第 k 行。使得 a_{nj} 中只有 a_{lj} 非零。使方程充分化简。

3. 顺次逆序解出未知数，再向前代入。

例题 1 解方程组：

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\
2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

♠

我们发现，解线性方程组只需要处理未知数的系数和常数项。为了简化求解步骤，我们可以降系数和常数项提出单独处理。记系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，常数项构成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$：

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.3}
$$

解答 经过化简，产生方程 $0 = 1$，方程组无解。

定义 2 称矩阵：

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \tag{1.4}
$$

为 n 元线性方程组的增广矩阵。 ♠

定义 3 初等行变换包括：

1. 交换两行。
2. 将一行加到另一行上。
3. 将一行中的每个元素乘一个系数。 ♠

经过初等行变换，我们可以将增广矩阵转化为上阶梯形矩阵。

定义 4 形如：

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1(i_1-1)} & a_{1i_1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & \cdots & 0 & a'_{2i_1} & \cdots & a_{2n} & b'_2 \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b''_n \\
0 & & & \cdots & & & 0 \\
 & & & \vdots & & &
\end{pmatrix} \tag{1.5}
$$

的矩阵被称作上阶梯形矩阵。 ♠

设每行第一个非零数所在列指标为 i_k，设 $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n+1$，讨论解的情况：

1. 当 $i_r = n+1$，出现方程 $0=1$，无解；
2. 当 $i_r \ne n = 1$，方程组有解：
   (a) 若 $i_r = n$，由于 $1 \le i_1 \le \cdots \le i_n \le n+1$，即 $i_k = k$，方程组有唯一组解。
   (b) 若 $i_r < n$，方程组有无穷组解。且方程的解可以写作：

$$\begin{cases} x_{i_1} = d + c_{11}x_{j_1} + \cdots + c_{1m}x_{j_m} \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_{i_r} = d + c_{r1}x_{j_1} + \cdots + c_{rm}x_{j_m} \end{cases} \tag{1.6}$$

   上述形式被称作**解系**，$(x_{j_1}, \cdots, x_{j_m})$ 被称作自由**未知量**，$(x_{i_1} \cdots x_{i_r})$ 被称作**主变量**。

问题 1 验证：矩阵化简为上阶梯形矩阵后非零行的个数与化简方法无关。即：矩阵的秩不随初等行变化改变。$R(\boldsymbol{A})$ 只与 $\boldsymbol{A}$ 有关。

证明 原命题即证同一个矩阵所对应的上阶梯形矩阵彼此间最多只能差若干次初等行变换。

设 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的上阶梯形矩阵。注意到初等行变换总有对应的逆变换：

1. 交换顺序显然可逆。
2. 将第 i 行加到第 j 行上的逆变换为将第 j 行减去第 i 行。
3. 将一行中的每个元素乘一个系数逆变换位乘这个系数的倒数。

而上述三种逆变换也是初等行变换。

故存在一系列初等行变换，使得 $\boldsymbol{B}$ 变换为 $\boldsymbol{A}$；又有前设可知存在一系列初等行变换，使得 $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{B}'$。连接两个初等行变换系列，我们便构造了一种方式，使得 $\boldsymbol{B}$ 可以经过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}'$。进而原命题成立。 ■

结论 本节课的内容包括：

1. 线性方程组的化简方法：Gauss-Jordan 算法;
2. 思考：一种变换下的本质不变性——几何 (埃尔朗根纲领)。 ♠