定义 1 简化阶梯形矩阵：每行首个 1 所在列只有一个非零元素的上阶梯形矩阵。我们称非零行的第一个非零元为主元。 ♠

下面我们引入一种特殊的线性方程组：

定义 2 齐次线性方程组：形如 $A_{ij}X^i = 0^j$ 的线性方程组，这里 0^j 指零向量。 ♠

齐次线性方程组一定有零解，即 $X^i = 0^i$；当 $R(\boldsymbol{A}) < n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于其行数，齐次线性方程组由无穷多组解。齐次线性方程组没有无解的情况。

$R(\boldsymbol{A})$ 即将 $\boldsymbol{A}$ 化简为上阶梯形矩阵后剩下的非零行个数。

定理 1 对于齐次方程组，若方程个数少于未知数个数，$R(\boldsymbol{A})$ 必定小于 n，此时方程组必有无穷多组解。 ♠

命题 1 复数域 $\mathbb{C}$。复数对加减乘除四种基本运算封闭，因此复数集是一个属于。 ♠

数域的具体定义见“高等数学 A 笔记”。常见数域有 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{p}), \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 等。数域有无穷多个。研究数域的科学包括抽象代数和代数数论等。

命题 2 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 之间没有数域。 ♠

证明 设存在这样的数域 $\mathbb{F}$ 满足：

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C} \tag{1}$$

下证 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。设 $\mathbb{F} \neq \mathbb{R}$，则必然存在复数 $a + bi(b \neq 0)$ 属于这个数域。

注意到：

$$i = \frac{(a+bi) - a}{b} \tag{2}$$

必然属于 $\mathbb{F}$，故对于任意复数 $z = c + di$，均能通过 $\mathbb{F}$ 中元素经四则运算得到。

因此 $\mathbb{F}$ 包括任意复数，原命题得证。 ■

Chapter 1

行列式

引入：行列式的几何意义。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

是三个空间向量张成的平行六面体的体积。下面从头开始对其推广。

定义 3 n 维向量即 n 元有序数对，有行向量和列向量之分。 ♠

定义 4 向量的加法：对应位置元素相加。 ♠

定义 5 向量的数乘：向量的每个元素乘上同一个系数。 ♠

定义 6 n 维笛卡尔坐标系：任何一个向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可以被拆分成 $\sum a_i e^i$，其中 $e^i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$，其中第 i 位为 1。称 $\sum a_i e^i$ 是向量在笛卡尔坐标系中的分解。 ♠

下面我们尝试推广体积：

设:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{F} \tag{1.2}$$

定义体积函数 det 满足：

$$\det : \mathcal{F}(0, 2) \to \mathbb{F} \tag{1.3}$$

以及以下限制：

1.

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\tag{1.4}$$

2.

$$\det\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=1\tag{1.5}$$

3.

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_j\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\tag{1.6}$$

定义 7 单位矩阵：$\boldsymbol{I}_n := \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$，共 n 个 1。 ♠

由二维向量可知：

$$\det\begin{bmatrix}a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2\\ c\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}=b\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ c\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}+a\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ c\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\tag{1.7}$$

$$=bd\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}+ac\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_1\end{bmatrix}+bc\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_1\end{bmatrix}+ad\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\tag{1.8}$$

$$=ad-bc\tag{1.9}$$

推广：

$$\det \begin{bmatrix} \sum a_{1i}\boldsymbol{e}_i \\ \sum a_{2i}\boldsymbol{e}_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni}\boldsymbol{e}_i \end{bmatrix} = \sum_i \prod_m a_{m\pi_i} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{i(1)} \\ \boldsymbol{e}_{i(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{i(n)} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

$$= \sum_i \prod_m a_{m\pi_i} (-1)^{\tau(\pi)} \tag{1.11}$$

其中 π 是 i 的一种 n 项排列，π_i 是排列中的第 i 项。$\tau(\pi)$ 指排列 π 的逆序对数。逆序指 $\pi_i > \pi_j$ 但 $i < j$。若排列中有两项相同，则 $\tau(\pi) := 0$。

称上述推广体积函数 det 为矩阵的行列式。