补充定义：

定义 1 排列：对自然数对 $(1,2,\cdots,n)$ 重新排序，得到 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，则称其为 1 到 n 的一种排列。 ♠

定义 2 逆序对数量为奇数，则称该排列为**奇排列**；反之，称之为**偶排列**。 ♠

$\tau(\pi)$ 也可以被理解为将排列 π 经过一一换序变为 $(1,2,\cdots,n)$ 的最少步骤数。

定理 1 对换两个元素，排列奇偶性改变。 ♠

上述定理可以进一步推广为：

定理 2 奇（偶）排列经过奇（偶）数次对换变成自然排列 $(1,2,\cdots,n)$。 ♠

定理 3 行排列与列排列的奇偶性同时改变。 ♠

考虑到经过有限次行列变换后排列逆序数可同时为 0，因此不管从行展开还是按列展开，同一项的逆序数必须相同：

$$\begin{vmatrix} & a_{12} & & \\ & & a_{23} & \\ a_{31} & & & \\ & & & a_{44} \end{vmatrix} \tag{1}$$

按行，逆序数为 $\tau(2314)$，按列为 $\tau(3124)$。故必有：

$$\tau(2314) = \tau(3124) \tag{2}$$

问题 1 求行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

♠

解答 记：

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

则：

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & \\ \vdots & A_{n-1} \\ a_{n1} & \end{vmatrix} = a_{11}A_{n-1} \tag{5}$$

♠

迭代：

$$A_n = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{6}$$

另一个对角矩阵的行列式与此相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{7}$$

问题 2 求行列式：

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

♠

解答

$$\det \begin{bmatrix} & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} i} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{9}$$

♠

定义 3 转置：

$$\left(A_i^j\right)^T = A_j^i \tag{10}$$

♠

定理 4

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T) \tag{11}$$

从而行的性质都可以对偶地应用在列上。 ♠

结论 1. 行公理化定义

2. 列公理化定义

3. 行列式定义 ♠

下面是几个例题：

问题 3 设：

$$\boldsymbol{C} = C_a^{\ b} = c_i^{\ j}(e^i)_a(e_j)^b = (a_i 1^j + 1_i b^j)(e^i)_a(e_j)^b \tag{12}$$

其中 $1_i, 1^i$ 是为凑齐指标而产生的所有元为 1 的向量，计算 $\det \boldsymbol{C}$。[1] ♠

解答

$$\begin{cases} \text{当} n \geq 3, \quad 0 \\ \text{当} n = 2, \quad (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \end{cases} \tag{13}$$

注意到当 $n \geq 3$，行列式中必有两行在拆解后相等 ($\boldsymbol{\beta}$ 或 $\mathbf{1}$) 则该结论显然。其中 $\det \boldsymbol{C} = |a_i 1_a + 1_j \beta_a|$，$\beta_a = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. ♠

[1]这里利用到了抽象指标记号。