一个矩阵，若两行相同，则行列式为零。这一性质是行列式的反交换律造成的：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

初等变换中，只有将某行的 k 倍加到另一行上不改变行列式的值。且对于其他两种变换，交换两行会产生一个负号，将某一行乘以 k 倍会使行列式的值乘相同的系数 k。

问题 1 求行列式 $\det \boldsymbol{A}$，其中 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} := (a_{ij})$，满足：

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda & i \neq j \\ k & i = j \end{cases} \tag{2}$$

♠

解答 注意到每一行和（或每一列和）均为 $(n-1)\lambda + k$，有：

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} \tag{3}$$

再将第一行的 $-\lambda$ 倍加到其余每一行上：

$$\det \boldsymbol{A} = [(n-1)\lambda + k](\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & k-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & & k-\lambda & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & k-\lambda \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k])(k-\lambda)^{n-1} \tag{4}$$

♠

下面我们仿照上一节问题**??**给出另一种解答：

解答 注意到：

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+(k-\lambda) & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda+(k-\lambda) & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+(k-\lambda) & & \lambda \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda+(k-\lambda) \end{vmatrix} \tag{5}$$

写作向量形式：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{1} + (k-\lambda)\boldsymbol{e}_1 \\ \lambda\mathbf{1} + (k-\lambda)\boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \lambda\mathbf{1} + (k-\lambda)\boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} \tag{6}$$

注意到行列式非零项必有各行不成比例：

$$\det \boldsymbol{A} = (k-\lambda)^n + \sum_{i=1}^{n} (k-\lambda)^{n-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \lambda\mathbf{1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} = (k-\lambda)^n + \sum_{i=1}^{n} (k-\lambda)^{n-1} \tag{7}$$

其中第一项来自于单位矩阵的行列式，第二项中 $\lambda\mathbf{1}$ 在行列式的第 i 行。进而两种解答的答案相同。♠

上面解答的最后一步非常神奇，也非常正常。可以从某种意义上将其作为 $\mathbf{1}$ 的性质。当其与其它基矢并做矩阵，并对这个矩阵求行列式，$\mathbf{1}$ 的效果与一个基矢的作用相当（将其它行乘 -1 加到其上）。

定义 1 余子式：将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划去第 i 行第 j 列剩下的元素构成的方阵被称作 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的余子式，记作 $\boldsymbol{M}_{ij}$。♠

引理 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \det \boldsymbol{M}_{11} \tag{8}$$

♠

证明 注意到 $(1, i)$ 均不为逆序：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i} \prod_{m} a_{m\pi_i} (-1)^{\tau(\pi)} \tag{9}$$

$$= a_{11} \sum_{i} \prod_{m} a_{m\pi'_i} (-1)^{\tau(\pi')} = a_{11} \det \boldsymbol{M}_{11} \tag{10}$$

■

从而：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} a_{1i} \det \boldsymbol{M}_{1i} \tag{11}$$

又注意到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$= a_{1i}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

对列也可以类似展开（换为 $j-1$ 次），从而我们可以定义：

定义 2 代数余子式：$\boldsymbol{A}_{ij} := (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$. ♠

行列式可以有新的展开方式：

定理 1 行列式按行展开：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \tag{14}$$

♠

元素和其余子式具有类似“内积”的性质：

定理 2

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{kj} = \begin{cases} \det \boldsymbol{A} & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \tag{15}$$

♠

证明 $k=i$ 的情况前文已证，下面说明 $k \neq i$ 时求和为零。构造矩阵：

$$\boldsymbol{B} = (b_{mn}) \quad b_{mn} = \begin{cases} a_{in} & m = k \\ a_{mn} & m \neq k \end{cases} \tag{16}$$

$\boldsymbol{B}$ 的行列式因有完全相同的两行而为零。对 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行展开：

$$\det \boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{kj} = 0 \tag{17}$$

■

列展开和行展开的公式等价。

下面我们来研究一类矩阵的行列式 (范德蒙行列式)：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{18}$$

不断地将第 $i-1$ 行的 $-a_1$ 倍加到第 i 行上，有：

$$\det \boldsymbol{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \tag{19}$$

提出每一列的公因式：

$$\det \boldsymbol{A}_n = \det \boldsymbol{A}_{n-1} \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \tag{20}$$

递推：

$$\det \boldsymbol{A}_n = \det \boldsymbol{A}_1 \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \tag{21}$$

有一些浅显的例子不再重复。

问题 2 求 n 阶行列式：

$$\det \boldsymbol{A}_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 1 & a+b & \end{vmatrix} \tag{22}$$

♠

解答 按行展开并递推可得：

$$\det \boldsymbol{A}_n = (a+b) \det \boldsymbol{A}_{11} + 1 \times \det \boldsymbol{A}_{21} = (a+b) \det \boldsymbol{A}_{n-1} - ab \det \boldsymbol{A}_{n-2} \tag{23}$$

记 $\det \boldsymbol{A}_i = D_i$，写出数列 $\{D_i\}$ 的特征方程：

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0 \tag{24}$$

解得两特征根 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$。则解为：

$$D_i = C_1 a^i + C_2 b^i \tag{25}$$

注意到：

$$D_1 = a + b \tag{26}$$

$$D_2 = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a + b} \tag{27}$$

有解：

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{a}{a + b} \\ C_2 = -\dfrac{b}{a - b} \end{cases} \tag{28}$$

从而：

$$\det \boldsymbol{A}_n = D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \tag{29}$$

♠