复习，如何计算行列式：

1. 矩阵的行、列公理化定义；

2. 行列式的展开公式；

3. Gauss-Jordan 算法转化为阶梯形矩阵；

4. 降阶法：按某一行或某一列展开。

问题 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1}$$

♠

解答 不妨进行补全：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} \tag{2}$$

注意到 y^{n-1} 项的系数的相反数即所求行列式：

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod_{1\le i\le n}(y-x_i)=\cdots-y^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\sum_{i=1}^{n}x_i+\cdots \tag{3}$$

从而：

$$D=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{4}$$

♠

行列式也可以按多行展开。记选第 i_k 行与 j_k 列相交位置元素构成的矩阵为：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

记 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ 的余子式。

下面以两行展开为例：

$$\begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\ a_{21}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} = \sum_{i \neq j} \begin{vmatrix} a_{1i}\boldsymbol{e}_i \\ a_{2j}\boldsymbol{e}_j \\ \vdots \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= \sum_{i \neq j} (-1)^{1+i}(-1)^{1+1+j} \det \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{bmatrix} \det \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \sum_{i \neq j} (-1)^{1+i+j} \det \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{bmatrix} \det \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \tag{8}$$

若非首两行，选第 k, l 行：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{1+i+j}(-1)^{1+k+l} \det \begin{bmatrix} a_{ki} & a_{lj} \\ a_{ki} & a_{lj} \end{bmatrix} \det \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{ki} & a_{lj} \\ a_{ki} & a_{lj} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$== \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{k+l+i+j} \det \begin{bmatrix} a_{ki} & a_{lj} \\ a_{ki} & a_{lj} \end{bmatrix} \det \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a_{ki} & a_{lj} \\ a_{ki} & a_{lj} \end{pmatrix} \tag{10}$$

问题 2

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & b & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}_{2n \times 2n} \tag{11}$$

♠

解答

$$D_{2n} = (-1)^{1+2n+1+2n}(a^2 - b^2)D_{2n-2} \tag{12}$$

$$= (a^2 - b^2)^n \tag{13}$$

♠

推广到 k 行 k 列展开：

$$\det \boldsymbol{A} = \sum \prod_{\{i\}} a_{i\pi_i}(-1)^{\tau(\pi)} \prod_{\{1,\cdots,n\}/\{i\}} a_{i\pi_i}(-1)^{\tau(\pi)} \tag{14}$$

$$= \sum (-1)^{\sum^k i + \sum^k j} \det \boldsymbol{B}_{k\times k} \det \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}) \tag{15}$$

问题 3

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{m\times n} & \boldsymbol{C}_{m\times m} \end{vmatrix} \tag{16}$$

♠

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{m\times n} & \boldsymbol{C}_{m\times m} \end{vmatrix} = (-1)^{1+\cdots+n+1+\cdots+n} \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{C} \tag{17}$$

$$= \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{C} \tag{18}$$

问题 4

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n} \end{vmatrix} \tag{19}$$

♠

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n\times n} \\ \boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+\cdots+n+m+1+\cdots+m+n} \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{C} \tag{20}$$

$$= (-1)^{mn} \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B} \tag{21}$$