Peking University **严绍恒**, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 10 月 1 日

行列式作业

问题 1 计算行列式：

$$\det \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

解答 注意到上述行列式可以被分块为：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

又可计算出两行列式分别为：

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= 3 \times 4 - 2 \times (-1) = 14 \\ \det \boldsymbol{B} &= 1 \times (3 \times 2) - 2 \times (-4 \times 1) \\ &= 6 + 8 = 14 \end{aligned}$$

从而根据行列式的多行展开：

$$\det \boldsymbol{Q} = (-1)^{1+2+1+2} \det A \det B = 196 \tag{2}$$

问题 2 计算行列式：

$$\det \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kr} \end{vmatrix}$$

解答 直接按照前 k 行前 k 列对行列式展开：

$$\det \boldsymbol{Q} = (-1)^{1+\cdots+k}(-1)^{1+\cdots+k}\det \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} \tag{3}$$