Peking University 严绍恒, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 10 月 2 日

行列式（思考题）作业

问题 1 求下列行列式：

$$\det \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

解答 上述行列式可以被写作：

$$\begin{vmatrix} -2a_1\boldsymbol{e}_1 + a_1\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个单位向量，$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$。拆分：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2a_1\boldsymbol{e}_1 + a_1\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} &= -2a_1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} \\ &= -2a_1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2 + a_2\mathbf{1} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\mathbf{1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

下面我们分别对上述三项进行计算。下面先看第一项：

$$-2a_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ -2a_2\boldsymbol{e}_2+a_2\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}=(-2)^2a_1a_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}-2a_1a_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \mathbf{1}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}$$
$$-2a_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}\end{vmatrix}$$

第一项的第二项：

$$\begin{aligned}-2a_1a_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \mathbf{1}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}&=(-2)^2a_1a_2a_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \mathbf{1}\\ \boldsymbol{e}_3\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}+(-2)a_1a_2\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \mathbf{1}\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n\end{vmatrix}\\ &=(-2)^2a_1a_2a_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \mathbf{1}\\ \boldsymbol{e}_3\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}+(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

第一项的第三项：

$$\begin{aligned}-2a_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}\end{vmatrix}&=(-2)^2a_1a_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{e}_3\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}\end{vmatrix}-2a_1\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{1}\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n\end{vmatrix}\\ &=(-2)^2a_1a_3\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{e}_3\\ \vdots\\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1}\end{vmatrix}+(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

第二项：

$$
\begin{aligned}
a_1\begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} &= (-2)a_1a_2\begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} \\
&= (-2)a_1a_2\begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} + (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

第三项：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ -2a_2\boldsymbol{e}_2+a_2\mathbf{1} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1} \end{vmatrix} &= -2a_2\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1} \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n \end{vmatrix} \\
&= (-2)a_2\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n+a_n\mathbf{1} \end{vmatrix} + (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

从而：

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{Q}_{n\times n} =& 4(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i - 2a_1 \det \boldsymbol{Q}_{(n-1)\times(n-1)} + (-2)^2 a_1a_2a_3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} \\
& + (-2)^2 a_1a_3 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\boldsymbol{1} \end{vmatrix} + (-2)a_1a_2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} \\
& + (-2)a_2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ -2a_n\boldsymbol{e}_n + a_n\boldsymbol{1} \end{vmatrix} \\
& = -2a_1 \det \boldsymbol{Q}_{(n-1)\times(n-1)} + (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i \left[2n - 5 - \sum_{i,j}\frac{a_i}{a_j}\right]
\end{aligned}
$$

递推：

$$
\det \boldsymbol{Q}_{n\times n} = (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n} a_i \left[(n-2)^2 - \sum_{i,j}\frac{a_i}{a_j}\right] \tag{2}
$$

下面是另外一个方法：

解答

$$
\det \boldsymbol{Q}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}
$$

化简：

$$
\det \boldsymbol{Q}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}
$$

继续扩展并化简：

$$\det \boldsymbol{Q}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i \left[(n-2)^2 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1}\sum_{j=1}^n a_j\right]$$

两种解的答案是一致的。

问题 2 求下列行列式：

$$\det(\boldsymbol{A} + x\mathbf{1}_{n\times n}) \tag{3}$$

解答 扩展：

$$\det(\boldsymbol{A} + x\mathbf{1}_{n\times n}) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

化简：

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}+x\mathbf{1}_{n\times n}) &= \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ -1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \det\boldsymbol{A} + x\sum_{i=1}^{n} M_{1i} - x\sum_{i=1}^{n} M_{2i}\cdots \\
&= \det\boldsymbol{A} + x\sum_{i,j}^{n} A_{ij}
\end{aligned}
$$