Peking University **严绍恒**, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 10 月 2 日

矩阵的秩作业

问题 1 证明: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么向量组 $a_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2, a_2\boldsymbol{\alpha}_2+b_3\boldsymbol{\alpha}_3, a_3\boldsymbol{\alpha}_3+b_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $a_1a_2a_3 \neq -b_1b_2b_3$.

证明 上述向量组等同于对 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，只用证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆则变换前后的秩相等：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 + b_2b_3b_1 \neq 0 \tag{1}$$

得证。 ■

问题 2 证明:如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,那么向量组 $a_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2, a_2\boldsymbol{\alpha}_2+b_3\boldsymbol{\alpha}_3, a_3\boldsymbol{\alpha}_3+b_4\boldsymbol{\alpha}_4, a_4\boldsymbol{\alpha}_4 + b_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $a_1a_2a_3a_4 \neq b_1b_2b_3b_4$.

证明 类似于上一道题：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_4 \\ b_1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 - b_2(-b_3)(-b_4)b_1 \neq 0 \tag{2}$$

得证。 ■

问题 3 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证明 套用第一题的结论：

$$2 \times 1 \times 4 + 1 \times 5 \times 3 \neq 0 \tag{3}$$

故上述向量组线性无关。 ■