Peking University **严绍恒**, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 10 月 15 日

矩阵的秩作业

问题 1 证明：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \tag{1}$$

证明 取 A 与 B 的最大线性无关行向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}, \{\boldsymbol{\beta}_i\}$，二者在扩充后依然是线性无关的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_i|0\}, \{\boldsymbol{\gamma}_i|\boldsymbol{\beta}_i\}$。注意到零向量怎样线性组合都无法得到非零向量，故 $\{\boldsymbol{\alpha}_i|0\}$ 无法线性表示 $\{\boldsymbol{\gamma}_i|\boldsymbol{\beta}_i\}$，而满秩向量组对应的齐次线性方程组没有非零解，从而 $\{\boldsymbol{\alpha}_i|0\}$ 无法被 $\{\boldsymbol{\gamma}_i|\boldsymbol{\beta}_i\}$ 线性表示，$\{\boldsymbol{\alpha}_i|0\}, \{\boldsymbol{\gamma}_i|\boldsymbol{\beta}_i\}$ 均属于原矩阵的一个线性无关组。原矩阵的秩大于两个分线性无组的元素个数的和。证毕。 ■

上一道题不能直接取等的原因是可能存在两个线性相关的 $\beta_i = \beta_j$，但与不同的 γ_i, γ_j 组合后变得线性无关了。从而新矩阵的秩大于等于两个分矩阵秩序的和。

问题 2 对于满列秩矩阵 A 与 B，证明：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \tag{2}$$

证明 转置，利用前一问结论：

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \tag{3}$$

又因为总共只有 $m+n$ 列，故：

$$m+n \geq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = m+n \tag{4}$$

证毕。 ■

证明 已知线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots = b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots = b_n \end{cases} \tag{5}$$

的系数矩阵与 $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}$ 秩相同。证明方程组有解。 ■

解答 注意到：

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}(A|\beta) \geq \mathrm{rank}A \tag{6}$$

从而 $\mathrm{rank}(A|\beta) = \mathrm{rank}A$，原方程有解。