

线性方程组作业

问题 1 a 为何值时, 下述线性方程组有解? 当有解时, 求它所有的解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2a + 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2a \end{cases} \quad (1)$$

解答 写出方程的增广矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a + 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{bmatrix} \quad (2)$$

经过初等行变换:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

出现方程 $0 = 1$, 无解。

问题 2 下列其次线性方程有无非零解? 若有, 解出一般解。

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

解答 写出系数矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{bmatrix} \quad (5)$$

进行初等行变换, 得到:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

从而有非零通解:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_4 \end{cases} \quad (7)$$

其中, x_4 是自由变量。