Peking University 严绍恒, Shaoheng Yan

Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416

Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 9 月 12 日

数域练习题及补充题一作业

问题 1 令:

$$F=\left\{\frac{a_0+a_1e+\cdots+a_ne^n}{b_0+b_1e+\cdots+b_me^m}\,\middle|\,\begin{array}{l}n,m\text{为任意非负整数},a_i,b_j\in\mathbb{Z}\\ 0\le i\le n,0\le,j\le m\end{array}\right\}\tag{1}$$

证明 F 是数域，其中 e 是自然常数。

证明 下面证明 F 对加法封闭。设 $f_1=\dfrac{\sum\limits_{i=0}F_{1i}e^i}{\sum\limits_{i=0}f_{1i}e^i},f_2=\dfrac{\sum\limits_{i=0}F_{2i}e^i}{\sum\limits_{i=0}f_{2i}e^i}\in F$：

$$f_1+f_2=\frac{\sum\limits_{i=0}F_{1i}e^i\sum\limits_{i=0}f_{2i}e^i+\sum\limits_{i=0}f_{1i}e^i\sum\limits_{i=0}F_{2i}e^i}{\sum\limits_{i=0}f_{1i}e^i\sum\limits_{i=0}f_{2i}e^i}=\frac{\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{i+j=\lambda}(F_{1i}f_{2j}+f_{1i}F_{2j})e^\lambda}{\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{i+j=\lambda}f_{1i}f_{2j}e^\lambda}\in F\tag{2}$$

这其实是因为整多项式环对乘法与加法封闭。相应的，F 对减法也封闭。下面证 F 对乘法封闭：

$$f_1\times f_2=\frac{\sum\limits_{i=0}F_{1i}e^i\sum\limits_{i=0}F_{2i}e^i}{\sum\limits_{i=0}f_{1i}e^i\sum\limits_{i=0}f_{2i}e^i}=\frac{\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{i+j=\lambda}F_{1i}F_{2j}e^\lambda}{\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{i+j=\lambda}f_{1i}f_{2j}e^\lambda}\in F\tag{3}$$

F 对取倒数封闭（复合一次乘法后即对除法封闭）：

$$f^{-1}=\frac{\sum\limits_{i=0}f_ie^i}{\sum\limits_{i=0}F_ie^i}\in F\tag{4}$$

综上，F 对四则运算封闭，F 是数域。 ■

问题 2 解下列线性方程组：

$$\begin{cases}(1+a_1)x_1+x_2 & +x_3+\cdots & +x_n=b_1\\ x_1+(1+a_2)x_2 & +x_3+\cdots & +x_n=b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1+x_2 & +x_3+\cdots & +(1+a_n)x_n=b_n\end{cases}\tag{5}$$

其中 $a_i\neq0$，$\sum a_i^{-1}\neq-1$.

解答 注意到两个重要关系：

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} \tag{6}$$

$$\frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} x_j}{a_i} = x_i \tag{7}$$

(6)可由第 i 行同除 $a_i(i=0,1\cdots,n)$ 再全部求和得到，(7)是原方程每一行的变形，是显然的。由(6)解出：

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} \left(1+\sum_{j=1}^{n} a_j^{-1}\right)^{-1} \tag{8}$$

代入(7)：

$$x_k = \frac{b_k - \left(1+\sum_{j=1}^{n} a_j^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}}{a_k} \tag{9}$$