Peking University 严绍恒, Shaoheng Yan
Name of Course: 线性代数-A **ID:** 2400017416
Prof. 赵玉凤 **Date:** 2024 年 9 月 18 日

行列式作业

问题 1 证明：

1. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0;$

2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

证明 1. 写成向量形式，记 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$，以此类推：

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) - \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) - \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0 \end{aligned}$$

2. 写成向量形式，记 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$，以此类推：

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \\ &= \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 2\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

■

问题 2 计算下列 n 阶行列式：

1. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$

2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

解答 1. 化简：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^n a_ib_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 - \sum_{i=2}^n a_ib_i$$

2. 写作向量：

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \\ a_2\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$
$$= a_1\det\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ a_2\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ a_2\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$
$$= a_1\det\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} + a_2\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ a_n\mathbf{1}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

从这里可以看出，对于任意 $n \geq 3$，对行列式拆解后必有两行同为 $\mathbf{1}$ 或 $\boldsymbol{b}$，故行列式必为 0。当 $n = 2$：

$$\det \boldsymbol{A} = a_1(b_2-b_1) + a_2(b_1-b_2) = (a_1-a_2)(b_2-b_1)$$

问题 3 求 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

解答 套结论题。注意到：

$$\begin{aligned} D_n &= x^n \begin{vmatrix} x^{-1}+x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x^{-1}+x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x^{-1}+x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x^{-1}+x \end{vmatrix} \\ &= x^n \frac{(x^{-1})^{n+1} - x^{n+1}}{x^{-1} - x} \\ &= \frac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2} \end{aligned}$$

问题 4 计算 n 阶行列式 $(n \geq 2)$：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \cdots & x_n^3+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

解答 从第二行开始，用第 i 行减去第 $i-1$ 行，可得范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq < j \leq n} (x_j - x_i)$$

问题 5 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

解答 从第 n 行开始，将第 i 行加到第 $i-1$ 行上：

$$\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

拆成两部分：

$$\det \boldsymbol{A}_n = \prod_{i=1}^{n}(-a_i) + \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

从而：

$$\det \boldsymbol{A}_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i + \det \boldsymbol{A}_{n-1}$$

累加：

$$\det \boldsymbol{A}_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} a_j$$

其中 1 与 $i=1$ 的项组合成 $1-a_1 = \det \boldsymbol{A}_1$.